

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2001/2002

Februari/Mac 2002

SEP222 – Matematik Untuk Ahli-Ahli Ekonomi

Masa: 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEPULUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab LIMA (5) soalan sahaja. Soalan 1, 2 dan 3 daripada Bahagian A adalah wajib dijawab. Jawab mana-mana DUA (2) soalan daripada Bahagian B.

Bahagian A (60 markah)

Jawab SEMUA soalan.

1. Dapatkan terbitan pertama bagi fungsi-fungsi berikut:

(a) $y = (x^2 + 1)^2 (2x^3 - 1)$

(b) $y = \frac{3+x}{\sqrt{x+2}}$

(c) $y = e^{x^2 \ln x}$

(d) $y = 5^{x+1}$

(e) $y = \log_a (x^2 - 3)^2$

(f) $x^2y - x^3 - y^2 = 0$

(18 markah)

2. Kirakan kamiran-kamiran berikut:

(a) $\int \frac{3x^2 + 2}{4x^3 + 8x} dx$

(b) $\int 2xe^{-x} dx$

(c) $\int \frac{1}{4x^2 - 25} dx$

(d) $\int_2^4 \frac{8x}{(x-3)^3} dx$

(12 markah)

3. (a) Carikan pembeza berperingkat pertama dan kedua bagi fungsi:

$$u = e^{x^2} + \ln y + 3xy$$

(b) Diberikan fungsi pengeluaran CES:

$$Q = (ak^{-c} + bL^{-c})^{-1/c} \text{ di mana } a, b, \text{ dan } c \text{ adalah pemalar.}$$

Tunjukkan:

(i) Fungsi pengeluaran CES itu adalah fungsi homogen yang linear.

(ii) Fungsi produk marginal buruh, MP_L adalah fungsi homogen sifar.

(c) Andaikan fungsi permintaan $P = \frac{4}{\sqrt{Q}}$ di mana P dan Q adalah harga dan kuantiti masing-masing.

Hitungkan keanjalan permintaan harga.

(d) (i) Diberikan fungsi permintaan $44 - 4P - Q = 0$, apakah nilai hasil marginal pada $Q = 4$?

(ii) Diberikan fungsi kos purata $AC = \frac{160}{Q} + 5 - 3Q + 2Q^2$, apakah nilai kos marginal pada $Q = 4$?

- (e) Diberikan fungsi $Z = e^{(3x^2 - 6x + y^2 - 8y)}$, carikan x dan y yang meminimumkan fungsi itu.
- (f) Hitungkan X dan Y yang memaksimumkan fungsi utiliti $u = x^{0.5} \cdot y^{0.5}$ yang tertakluk kepada kekangan belanjawan $6x + 2y = 180$.
- (g) (i) Kadar pelaburan bersih ialah $I = 45t^{4/5}$ di mana t adalah masa. Stok model pada $t = 0$ ialah 105. Carikan fungsi modal K .
- (ii) Diberikan fungsi hasil marginal $MR = 60 - 2Q - 2Q^2$ di mana Q adalah kuantiti. Carikan fungsi permintaan di mana P (harga) diungkapkan dalam Q , iaitu $P = f(Q)$.
- (30 markah)

Bahagian B (40 markah)

Jawab DUA (2) soalan sahaja.

4. (a) Andaikan keluk kos purata (AC) dan kos marginal (MC) berbentuk huruf U. Tunjukkan bahawa:
- (i) Apabila AC meningkat, MC melebihi AC.
- (ii) Apabila AC menurun, AC melebihi MC.
- (iii) Apabila AC mencapai minimum, $MC = AC$.
- Lukiskan satu rajah untuk menjelaskan jawapan anda.
- (8 markah)
- (b) Fungsi utiliti dan kekangan belanjawan bagi seorang pengguna adalah $U = \ln x + 3 \ln y$ dan $P_x x + 0.3y = 50$ masing-masing.
- (i) Terbitkan fungsi permintaan pengguna itu untuk barang X .
- (ii) Kirakan keanjalan permintaan harga untuk barang X .
- (iii) Sekiranya $P_x = 0.50$, apakah paras x dan y yang memaksimumkan utiliti pengguna itu?
- (12 markah)

5. (a) Diberikan fungsi pengeluaran Cobb-Douglas:

$$Q = AL^\alpha K^\beta$$

di mana Q , L dan K adalah output, buruh dan modal masing-masing, manakala α dan β adalah pemalar.

- (i) Adakah fungsi itu memenuhi Teorem Euler?
- (ii) Apakah peringkat homogen bagi fungsi produk marginal modal (MP_K)?

(8 markah)

- (b) Katakan sebuah firma menghadapi dua fungsi permintaan berlainan yang berikut:

$$\begin{aligned} \text{Pasaran 1: } Q_1 &= 16 - 0.2P_1 \\ \text{Pasaran 2: } P_2 &= 180 - 20Q_2 \end{aligned}$$

Fungsi kos firma adalah $TC = 20Q + 20$ di mana $Q = Q_1 + Q_2$.

- (i) Sekiranya firma mengamalkan diskriminasi harga, apakah paras harga dan kuantiti di dalam setiap pasaran yang akan memaksimumkan keuntungannya? Berapakah keuntungan maksimum itu?
- (ii) Sekiranya firma tidak mengamalkan diskriminasi harga, apakah paras harga dan kuantiti yang akan memaksimumkan keuntungannya? Berapakah keuntungan maksimum itu?

(12 markah)

6. (a) Diberikan model makroekonomi seperti berikut:

$$Y = C + I_0 + G_0 + X_0 - M$$

$$C = C_0 + bY_d$$

$$T = T_0 + tY$$

$$M = M_0 + mY_d$$

$$\text{dan } Y_d = Y - T$$

di mana $0 < b, m, t < 1$

- (i) Hitungkan pendapatan keseimbangan, Y^* .

- (ii) Hitungkan pengganda import autonomous, iaitu, $\frac{\partial Y^*}{\partial M_0}$.
- (iii) Hitungkan kesan perubahan kecenderungan marginal untuk import ke atas Y^* , iaitu $\frac{\partial Y^*}{\partial m}$.

(8 markah)

- (b) Sebuah firma yang mengeluarkan 2 jenis barangan X dan Y menghadapi fungsi-fungsi permintaan berikut:

$$X = 40 - 2P_x + P_y$$

$$Y = 15 + P_x - P_y$$

Fungsi kosnya adalah $C = x^2 + xy + y^2$ dan kekangan (kuota) outputnya ialah $2x + 4y = 48$. Apakah paras output x dan y yang memaksimumkan keuntungannya? Berapakah keuntungan maksimum itu?

(12 markah)

7. (a) Diberikan keanjalan permintaan harga adalah α , iaitu $\frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = \alpha$.

Dapatkan fungsi permintaan dalam bentuk: $Q = f(P)$.

(8 markah)

- (b) Sebuah firma monopoli menghadapi fungsi permintaan $P = 6 - 0.3Q$ dan fungsi kos puratanya adalah $AC = \frac{20}{Q} + 1 + 0.2Q$.

- (i) Hitungkan lebihan pengguna sekiranya keuntungan firma itu dimaksimumkan.
- (ii) Hitungkan lebihan pengguna sekiranya hasil firma itu dimaksimumkan.

(12 markah)

LAMPIRANPeraturan Asas Pembezaan

Hasil Darab: $y = uv$ di mana $u = f(x), v = g(x)$

$$y' = uv' + vu'$$

Hasil Bahagi: $y = \frac{u}{v}$ di mana $u = f(x), v = g(x)$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Fungsi Logaritma: (i) $y = \log_a x$

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

(ii) $y = \ln x$

$$y' = \frac{1}{x}$$

(iii) $y = \log_a u$ di mana $u = f(x)$

$$y' = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \log_a e$$

(iv) $y = \ln u$ di mana $u = f(x)$

$$y' = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

Fungsi Eksponen: (i) $y = a^x$

$$y' = a^x \ln a$$

(ii) $y = e^x$

$$y' = e^x$$

(iii) $y = a^u$ di mana $u = f(x)$

$$y' = a^u \frac{du}{dx} \ln a$$

(iv) $y = e^u$

$$y' = e^u \frac{du}{dx}$$

Pembeza bagi fungsi dua pembolehubah

(A) $u = f(x, y)$

Pembeza pertama: $du = f_x dx + f_y dy$

Pembeza kedua: $d^2u = f_{xx} dx^2 + f_{yy} dy^2 + 2f_{xy} dx dy$

(B) $u = f(x, y)$ di mana $y = g(x)$

Pembeza pertama: $du = f_x dx + f_y dy$

Pembeza kedua; $d^2u = f_y d^2y + f_{xx} dx^2 + f_{yy} dy^2 + 2f_{xy} dx dy$

Maksimum dan Minimum

(A) $y = f(x)$

syarat perlu: $y' = 0$

syarat cukup: Maksimum: $y'' < 0$
Minimum: $y'' > 0$

Jika $y'' = 0$ dan $y''' \neq 0$, titik infleksi

Jika $y'' = 0$, $y''' = 0$, $y^{(4)} > 0$ (minimum)

Jika $y'' = 0$, $y''' = 0$, $y^{(4)} < 0$ (maksimum)

(B) $u = f(x, y)$

syarat perlu: $f_x = 0$

$f_y = 0$

syarat cukup:

Maksimum

Minimum

$f_{xx} < 0$

$f_{xx} > 0$

$f_{yy} < 0$

$f_{yy} > 0$

$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$

$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$

Titik Infleksi

Titik Pelana

f_{xx} dan f_{yy} mempunyai tanda yang sama

f_{xx} dan f_{yy} mempunyai tanda yang bertentangan

$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$

$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$

(C) $u = f(x, y)$

tertakluk kepada: $c = g(x, y)$ di mana $g(x, y)$ adalah fungsi linear

dan y diungkapkan dalam x

syarat perlu: $\frac{f_x}{f_y} = -\frac{dy}{dx}$

syarat cukup: (maksimum) $f_{xx}f_y^2 + f_{yy}f_x^2 - 2f_{xy}f_xf_y < 0$

(minimum) $f_{xx}f_y^2 + f_{yy}f_x^2 - 2f_{xy}f_xf_y > 0$

(D) $u = f(x, y)$

tertakluk kepada: $C = h(x, y)$ di mana $h(x, y)$ adalah fungsi tak linear

dan y diungkapkan dalam x

syarat perlu: $\frac{f_x}{f_y} = -\frac{dy}{dx}$

syarat cukup: (maksimum) $f_{xx} + f_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2f_{xy}\frac{dy}{dx} + f_y\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

(minimum) $f_{xx} + f_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2f_{xy}\frac{dy}{dx} + f_y\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

Peraturan Asas Kamiran

Kuasa: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$

Eksponen: $\int e^x dx = e^x + c$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int a^u dx = \frac{a^u}{\frac{du}{dx} \ln a} + c$$

$$\int e^u dx = \frac{e^u}{\frac{du}{dx}} + c$$

Logaritma: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

$$\int \frac{2x}{(x^2 + 1)} dx = \ln(x^2 + 1) + c \quad (\text{terbitan penyebut adalah sebutan pembilang})$$

Penggantian: $\int (5x + 7)^8 dx$

Biarkan $u = 5x + 7$

masalah menjadi $\frac{1}{5} \int u^8 du$

Mengikut bahagian: $\int v du = vu - \int u dv$

$$\int x(x+1)^{1/2} dx$$

Biarkan $v = x$ dan $du = (x+1)^{1/2} dx$

$$dv = dx \text{ dan } u = \frac{2}{3} (x+1)^{3/2}$$

Gantikan ke dalam perkaitan tersebut

Secara pecahan separa:

$$\int \frac{1}{(M^2x^2 - N^2)} dx = \int \frac{1}{(Mx - N)(Mx + N)} dx$$

$$\text{Biarkan } \frac{1}{M^2x^2 - N^2} = \frac{A}{Mx - N} + \frac{B}{Mx + N}$$

Carikan A dan B. Gantikan dan dapat kamiran

Lebih Pengguna (CS) dan Lebih Pengeluar (PS)

$$CS = \int_0^{Q_0} f(Q) dQ - P_0 Q_0$$

di mana $f(Q)$ adalah function permintaan dan P_0 dan Q_0 adalah harga dan kuantiti pada keseimbangan

$$PS = P_0 Q_0 - \int_0^{Q_0} g(Q) dQ$$

di mana $g(Q)$ adalah function penawaran dan P_0 dan Q_0 adalah harga dan kuantiti pada keseimbangan

- oo o0o oo -